Théorème :

Dans un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel E de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus (au sens strict) de vecteurs qu'une famille génératrice.

Démonstration :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons la propriété :

« Si un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel E possède une famille génératrice à n vecteurs, alors toute famille constituée de $n+1$ vecteurs est liée ».

Le résultat du théorème découle de manière immédiate de cette propriété.

Pour $n = 0$:

Si E possède une famille génératrice à 0 vecteurs c'est qu'alors $E = \text{Vect}(\varnothing) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Par suite toute famille constituée d'un vecteur de E est liée car celle-ci contient le vecteur nul.

Supposons la propriété établie au rang $n-1 \in \mathbb{N}$.

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel possédant une famille génératrice $\mathcal{G} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ formée de n vecteurs et $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n+1})$ une famille formée de $n+1$ vecteurs de E.

Nous voulons montrons que $\mathcal{U}$ est liée.

Posons $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1})$.

$\mathcal{G}$ étant une famille génératrice de E, chaque vecteur de la famille $\mathcal{U}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de E, ceci permet d'écrire : $\forall 1 \leq i \leq n+1, \vec{u}_i = \vec{v}_i + \alpha_i.\vec{e}_n$ avec $\vec{v}_i \in F$ et $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Distinguons deux cas :

1er cas : Si $\forall 1 \leq i \leq n+1, \alpha_i = 0$.

On observe alors que $\forall 1 \leq i \leq n+1, \vec{u}_i \in F$.

Or F est un sous-espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs et la famille $\mathcal{U}$ est formée de $n+1$ vecteurs de celui-ci, l'hypothèse de récurrence (appliquée à une sous famille quelconque de n vecteurs de $\mathcal{U}$) permet alors d'affirmer que $\mathcal{U}$ et liée.

2ème cas : Sinon $\exists 1 \leq i \leq n+1, \alpha_i \neq 0$.

Quitte à réindexer les vecteurs de la famille $\mathcal{U}$ (ce qui ne changera rien à son caractère liée ou non) on peut supposer $\alpha_{n+1} \neq 0$.

Posons alors $\forall 1 \leq i \leq n, \vec{x}_i = \vec{u}_i - \dfrac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}.\vec{u}_{n+1}$.

On a $\vec{x}_i = \vec{v}_i + \alpha_i.\vec{e}_n - \dfrac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}.\left(\vec{v}_{n+1} + \alpha_{n+1}.\vec{e}_n\right) = \vec{v}_i - \dfrac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}.\vec{v}_{n+1} \in F$.

La famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ apparaît alors comme étant une famille formée de n vecteurs de l'espace F, or F est engendré par $n-1$ vecteurs, l'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer que cette famille est liée.

Par suite $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1.\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n.\vec{x}_n = \vec{0}$

En reprenant l'expression de chaque $\vec{x}_i$, la relation ci-dessus donne :

$\lambda_1.\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n.\vec{u}_n + \lambda_{n+1}.\vec{u}_{n+1} = \vec{0}$ avec $\lambda_{n+1} = -\dfrac{\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$.

Cette dernière relation étant écrite avec des scalaires λ_i non tous nuls, on peut conclure que la famille $\mathcal{U}$ est liée.

Récurrence établie.